Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 3

Drei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir betrachten die Ereignisse:
A: „Die Augensumme ist 11“, und
B: „Die Augensumme ist 12“.
Untersuche, ob A und B gleichwahrscheinlich sind.

1. Lösungsweg

Durch systematisches Probieren ermitteln wir alle Summen, die zu 11 bzw. 12 führen. Das Ergebnis sehen wir in der nebenstehenden Tabelle.

für 11:	für 12:
$1+4+6$	$1+5+6$
$1+5+5$	$2+4+6$
$2+3+6$	$2+5+5$
$2+4+5$	$3+3+6$
$3+3+5$	$3+4+5$
$3+4+4$	$4+4+4$

Anmerkung: Wegen des Kommutativgesetzes spielt die Reihenfolge der Summanden keine Rolle.
Es gibt also sowohl für 11 als auch für 12 jeweils sechs Möglichkeiten. Daraus folgt:
Antwort: Die zwei Ereignisse sind gleichwahrscheinlich.

2. Lösungsweg

Wir arbeiten mit den Pfadregeln.

$$P(A) = \underset{\substack{\uparrow\\1}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\1}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\1}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\1}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}}$$

$$+ \underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\1}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\1}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\5}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\1}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\1}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\3}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\2}}{\tfrac{1}{6}} + \underset{\substack{\uparrow\\6}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\4}}{\tfrac{1}{6}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\1}}{\tfrac{1}{6}} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$$

$$P(B) = \frac{1}{\uparrow 1}\cdot\frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 6} + \frac{1}{\uparrow 1}\cdot\frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 5} + \frac{1}{\uparrow 2}\cdot\frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 6} + \frac{1}{\uparrow 2}\cdot\frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 5} + \frac{1}{\uparrow 2}\cdot\frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 4} + \frac{1}{\uparrow 3}\cdot\frac{1}{\uparrow 3}\cdot\frac{1}{\uparrow 6} + \frac{1}{\uparrow 3}\cdot\frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 5} + \frac{1}{\uparrow 3}\cdot\frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 4} + \frac{1}{\uparrow 3}\cdot\frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 3} + \frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 2}\cdot\frac{1}{\uparrow 6} + \frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 3}\cdot\frac{1}{\uparrow 5} + \frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 4} + \frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 3}$$

$$+ \frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 2} + \frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 1}\cdot\frac{1}{\uparrow 6} + \frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 2}\cdot\frac{1}{\uparrow 5} + \frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 3}\cdot\frac{1}{\uparrow 4} + \frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 3} + \frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 2} + \frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 1} + \frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 1}\cdot\frac{1}{\uparrow 5} + \frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 2}\cdot\frac{1}{\uparrow 4} + \frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 3}\cdot\frac{1}{\uparrow 3} + \frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 4}\cdot\frac{1}{\uparrow 2} + \frac{1}{\uparrow 6}\cdot\frac{1}{\uparrow 5}\cdot\frac{1}{\uparrow 1} = \frac{25}{216} \approx 0{,}116$$

Ein Vergleich der zwei Ergebnisse zeigt:

Antwort: Die zwei Ereignisse sind so gut wie gleichwahrscheinlich.

3. Lösungsweg

Die möglichen Augensummen liegen zwischen 3 und 18. Anschaulich:

$$3,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7,\ \ 8,\ \ 9, 10 \parallel \mathbf{11}, \mathbf{12}, 13, 14, 15, 16, 17, 18$$

Ferner gilt:

$3 = 1{+}1{+}1$, $18 = 6{+}6{+}6$

$4 = 1{+}1{+}2 = 1{+}2{+}1 = 2{+}1{+}1$, $17 = 6{+}6{+}5 = 6{+}5{+}6 = 5{+}6{+}6$ usw.

Allgemein gilt: Aus Symmetriegründen haben die Augenzahlen, die von der Mitte $\parallel$ gleich weit entfernt sind, dieselben Wahrscheinlichkeiten. So ist z. B. $P(10) = P(11)$, $P(9) = P(12)$, $P(4) = P(17)$. Wir bemerken, dass 11 und 12 diese Bedingung nicht erfüllen. Daraus folgt:

Antwort: Die zwei Ereignisse sind nicht gleichwahrscheinlich.

Die drei Lösungswege haben zu teils unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?