

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 6

Löse die Gleichungen:

$$\text{a) } x^{x^{x^{\dots}}} = 2 \quad \text{b) } x^{x^{x^{\dots}}} = 4, \quad \text{wobei } x > 0.$$

Anmerkungen

$$1. \quad x^{x^x} = x(x^x), \quad x^{x^{x^x}} = x(x(x^x)) \quad \text{usw.}$$

2. $x^{x^{x^{\dots}}}$ enthält unendlich viele x -e und ist definiert als $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{x^{x^{\dots x}}}$, wobei die Funktion aus n x -en besteht.

Lösung

a) Aus $a = b$ folgt $x^a = x^b$. Wir potenzieren x mit beiden Seiten der Ausgangsgleichung.

$$x^{x^{x^{\dots}}} = x^2$$

Laut Bedingung ist die linke Seite 2.

$$2 = x^2$$

Antwort: Da $x > 0$ ist die einzige Lösung $x = \sqrt{2}$.

b) Wir potenzieren x mit beiden Seiten der Ausgangsgleichung.

$$x \cdot x \cdot x \cdot \dots = x^4$$

Laut Bedingung ist die linke Seite 4.

$$4 = x^4$$

Antwort: Es folgt die Lösung $x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Bemerkung

Beide Gleichungen haben als Lösung $x = \sqrt{2}$. Daraus folgt aber $2 = 4$.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?