

## Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter <http://www.wurzel.org/werkstatt>.

### Aufgabe 8

Sind die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ -2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 3 \\ -1,2 \end{pmatrix}$  linear abhängig oder linear unabhängig?

#### 1. Lösungsweg

Die Vektoren sind linear abhängig, wenn jeder Vektor als Linearkombination der anderen dargestellt werden kann.

$$\vec{a} = t\vec{b} + s\vec{c}$$

$$1 = 0,4t - 0,6s \quad (\text{I.})$$

$$-4 = -2t + 3s \quad (\text{II.})$$

$$3 = 0,8t - 1,2s \quad (\text{III.})$$

5 · (I.) + (II.) ergibt  $1 = 0$ . Dieser Widerspruch bedeutet, dass die Linearkombination nicht möglich ist. Daraus folgt:

Antwort: Die Vektoren sind linear unabhängig.

## 2. Lösungsweg

Wir arbeiten mit der Bedingung für die lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned} r\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c} = \vec{0} &\implies r = t = s = 0 && (*) \\ r - 0,4t - 0,6s = 0 &&& (I.) \\ -4r - 2t + 3s = 0 &&& (II.) \\ 3r + 0,8t - 1,2s = 0 &&& (III.) \end{aligned}$$

Mit  $4 \cdot (I.) + (II.)$  bzw.  $3 \cdot (I.) + (III.)$  folgt

$$\begin{aligned} r - 0,4t - 0,6s = 0 &&& (I.) \\ -0,4t + 0,6s = 0 &&& (II'.) \\ -0,4t + 0,6s = 0 &&& (III'.) \end{aligned}$$

Wir merken: Die letzten zwei Gleichungen sind gleich. Es gibt also unendlich viele Lösungen. Aus (\*) folgt:

Antwort: Die Vektoren sind linear abhängig.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?

*Anm.: Mitverfasser dieser Aufgabe ist Matthias Benkeser aus Ottensweier.*