

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 8

Betrachten wir die folgenden eingerahmten Aussagen:

p_1 : „Zwei mal zwei ist fünf.“
 p_2 : „Berlin ist die Hauptstadt von Ungarn.“
 $p_3(n)$: „In diesem Rahmen befinden sich genau n falsche Aussagen.“ ($n \in \mathbb{N}$)

Für welche natürlichen Zahlen ist die Aussage $p_3(n)$ richtig und für welche falsch?

Vorbemerkungen

Die ersten zwei Aussagen (p_1 und p_2) sind offensichtlich falsch. Für $n = 1$ ist die Aussage $p_3(1)$: „In diesem Rahmen befindet sich genau 1 falsche Aussage“ falsch, denn man hat garantiert zwei falsche Aussagen (p_1 und p_2). Für $n > 3$ ist $p_3(n)$ falsch, denn wir haben nur drei Aussagen und es kann unmöglich mehr falsche Aussagen geben als Aussagen insgesamt vorhanden sind. Deswegen haben wir lediglich zwei Fälle zu untersuchen: $n = 2$ und $n = 3$.

1. Lösungsweg

$p_3(2)$: „In diesem Rahmen befinden sich genau 2 falsche Aussagen“ ist richtig. Begründung: Es stimmt so, denn p_1 und p_2 sind falsch, $p_3(2)$ ist richtig. $p_3(3)$: „In diesem Rahmen befinden sich genau 3 falsche Aussagen“ kann nicht richtig sein. Begründung: Wenn $p_3(3)$ richtig wäre, dann müsste man – laut $p_3(3)$ – genau 3 falsche Aussagen haben. Man hat aber nur zwei (p_1 und p_2), denn laut Voraussetzung wäre $p_3(3)$ richtig – Widerspruch zur Annahme. Da $p_3(3)$ nicht richtig sein kann, ist es falsch.

Antwort: $p_3(2)$ ist richtig, $p_3(3)$ ist falsch.

2. Lösungsweg

$p_3(2)$: „In diesem Rahmen befindet sich genau 2 falsche Aussagen“ ist falsch. Begründung: Es stimmt so, denn p_1 , p_2 und $p_3(2)$ sind alle falsch. Damit ist die Bedingung „genau 2 falsche Aussagen“ nicht erfüllt, $p_3(2)$ ist also wirklich falsch. $p_3(3)$: „In diesem Rahmen befindet sich genau 3 falsche Aussagen“ kann nicht falsch sein. Begründung: Wenn $p_3(3)$ falsch wäre, dann wäre der Satz „In diesem Rahmen befindet sich genau 3 falsche Aussagen“ falsch. Das Verneinen von $p_3(3)$ bedeutet aber: In diesem Rahmen befinden sich nicht genau drei falsche Aussagen! Da p_1 und p_2 falsch sind, müsste $p_3(3)$ richtig sein – Widerspruch zur Annahme. Da $p_3(3)$ nicht falsch sein kann, ist es richtig.

Antwort: $p_3(2)$ ist falsch, $p_3(3)$ ist richtig.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?