

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 7

Die Folge (a_n) wird so definiert: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n > 2.$$

Löse die Gleichung $a_n = n^2$.

Lösung

Aus der Definition bzw. aus der Bedingung folgt:

$$\begin{aligned} n^2 &= (n-1)^2 + (n-2)^2 \\ n^2 &= n^2 - 2n + 1 + n^2 - 4n + 4 \\ n^2 - 6n + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $n = 1$ und $n = 5$.

Antwort: $\mathbb{L} = \{1; 5\}$

Bemerkung

Wir können die Glieder $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$ nach und nach berechnen.

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Wir machen nun die Probe in der Ausgangsgleichung.

$$n = 1 : a_1 = 12$$

1 = 1 und es stimmt.

$$n = 5 : a_5 = 52$$

5 = 25 ist aber falsch.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?