

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 5

Das nebenstehende Quadrat soll so ausgefüllt werden, dass die Zahlen 1, 2, 3, 4 in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der Quadrate *I*, *II*, *III*, *IV* genau einmal vorkommen. Auf wie viele Arten ist dies insgesamt möglich?

<i>I</i>	<i>II</i>
<i>IV</i>	<i>III</i>

1. Lösungsweg

Erst füllen wir die Quadrate *I* und *III* aus (Abbildung 1). Dies ist auf jeweils $4! = 24$ Arten möglich. Wir können *I* und *III* aber voneinander unabhängig ausfüllen. Aus der Produktregel folgt: Es gibt $24 \cdot 24 = 576$ Möglichkeiten diese zwei Quadrate auszufüllen. Nun ergänzen wir die restlichen Felder, sodass alle Bedingungen erfüllt werden. Wir stellen fest: Dies ist nur jeweils auf eine einzige Art möglich. Tatsächlich, Abbildung 2 führt z. B. zwangsläufig zu Abbildung 3, Abbildung 4 zu Abbildung 5.

<i>I</i>	<i>II</i>
<i>IV</i>	<i>III</i>

Abbildung 1

1	2		
3	4		
		1	2
		3	4

Abbildung 2

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

Abbildung 3

4	2		
3	1		
		1	4
		2	3

Abbildung 4

4	2	3	1
3	1	4	2
2	3	1	4
1	4	2	3

Abbildung 5

Es entstehen also keine neuen Fälle. Dies bedeutet:

Antwort: Es gibt 576 Quadrate.

2. Lösungsweg

Erst legen wir die Zahlen im Quadrat *I* folgendermaßen fest:

1	2
3	4

. Durch systematisches Probieren ermitteln wir nun alle möglichen Quadrate für diesen Fall. Wir erhalten diese 12 Möglichkeiten:

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

1	2	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	4	3

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

1	2	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	3	4

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

1	2	4	3
3	4	2	1
4	1	3	2
2	3	1	4

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

1	2	4	3
3	4	1	2
2	1	3	4
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Die Zahlen können wir aber im Ausgangsquadrat I auf $4! = 24$ Arten festlegen. Aus der Produktregel folgt $24 \cdot 12 = 288$.
Antwort: Es gibt 288 Quadrate.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?