

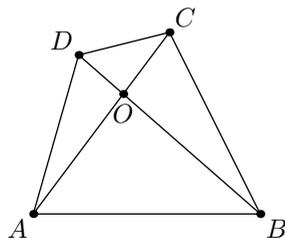
## Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter <http://www.wurzel.org/werkstatt>.

### Aufgabe 5

In einem beliebigen konvexen Viereck  $ABCD$  sei  $O$  der Schnittpunkt der Diagonalen. Untersuche, ob das Viereck  $ABCD$  so bestimmt werden kann, dass von den Dreiecken  $BOA$ ,  $COB$ ,  $DOC$ ,  $AOD$  genau drei zueinander ähnlich sind.

#### 1. Lösungsweg



Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $BOA \sim AOD \sim DOC$  (1)

Aus der Ähnlichkeit  $BOA \sim DOC$  folgt:

Die Seiten  $\overline{AO}$ ,  $\overline{DO}$ ,  $\overline{CO}$ ,  $\overline{BO}$  sind paarweise proportional. (2)

Andererseits ist  $\angle AOD = \angle BOC$  (Scheitelwinkel) (3)

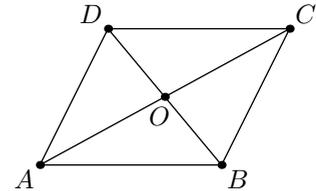
Da der Winkel eingeschlossen ist, folgt aus (2) und (3), dass  $DOA \sim BOC$ . Mit (1) bekommen wir  $AOB \sim DOA \sim COD \sim BOC$ . Aus der Ähnlichkeit dreier Dreiecke folgt also auch die Ähnlichkeit des vierten Dreiecks.

Dies bedeutet:

Antwort: Es gibt kein Viereck mit der gesuchten Eigenschaft.

## 2. Lösungsweg

Die vier Winkel rund um den Punkt  $O$  sind paarweise gleich. Zwei sind spitze, die anderen zwei stumpfe Winkel. In nebenstehender Abbildung sind z. B. die Winkel  $DOA$  und  $BOC$  spitze,  $COD$  und  $AOB$  stumpfe Winkel. Aus den vier Dreiecken können somit unmöglich drei ähnlich sein, denn ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck sind doch nicht ähnlich.



Bemerkung: Die einzige Ausnahme ist, wenn alle vier Winkel rechte Winkel sind. Damit drei ähnliche Dreiecke vorhanden sind, muss  $ABCD$  ein Quadrat sein. In diesem Fall ist dann das vierte Dreieck aber auch ähnlich, denn die vier Dreiecke sind sogar kongruent.

Antwort: Die Fragestellung ist teils irreführend, teils nichtssagend, denn vom Quadrat abgesehen gibt es keine Vierecke, bei denen mehr als zwei Dreiecke ähnlich wären. Es gibt daher praktisch nichts zu untersuchen.

Die zwei Lösungswege haben zu teils unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?