

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter <http://www.wurzel.org/werkstatt>.

Aufgabe 4

Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}} = \frac{3}{x}$. (1)

1. Lösungsweg

Ansatz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (2)

Beweis: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ bzw.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \Leftrightarrow (a+b)(c-d) = (a-b)(c+d) \Leftrightarrow ad = bc \quad \square$$

Wenden wir (2) auf (1) an, so erhalten wir $\frac{2\sqrt{3+x}}{2\sqrt{3-x}} = \frac{3+x}{3-x}$. (3)

Setzen wir $y := \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}$, so wird aus (3) $y = y^2$.

Diese Gleichung hat als Lösungen $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$.

1. Fall: $y = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} = 0 \Rightarrow x = -3$

$$\text{2. Fall: } y = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} = 1 \Rightarrow 3+x = 3-x \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Antwort: } \mathbb{L} = \{-3, 0\}$$

2. Lösungsweg

Ansatz: Der Bruch auf der linken Seite von (1) wird mit $\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}$ erweitert.

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x})^2}{(\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x})(\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x})} = \frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow & \frac{3+x+2\sqrt{(3+x)(3-x)}+3-x}{(3+x)-(3-x)} = \frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow & \frac{6+2\sqrt{9-x^2}}{2x} = \frac{3}{x} \quad | \cdot 2x \\ \Leftrightarrow & 6+2\sqrt{9-x^2} = 6 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{9-x^2} = 0 \\ \Rightarrow & x_{1,2} = \pm 3 \end{aligned}$$

$$\text{Antwort: } \mathbb{L} = \{-3, +3\}$$

Die zwei Lösungswege haben zu teils unterschiedlichen Ergebnissen geführt. Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?